CHAPITRE 3

ENSEMBLES ET APPLICATIONS

I. Théorie des ensembles

1. Ensembles

Définition 3.1

Un **ensemble** E est une collection d'objets mathématiques. Un objet x de cette collection est un **élément de** E. Pour tout objet x, on note $x \in E$ si x est un élément de E.

Remarque

Un ensemble peut être défini de deux manière :

- **En extension**, c'est à dire par une liste exhaustive de tous ses éléments :

$$E = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$$

- **En compréhension**, c'est à dire par une propriété commune à ses éléments et seulement ceux-ci :

$$E = \{x \in F \mid P(x)\}$$

  où P est une proposition dépendant du paramètre $x \in F$. Cette définition permet de définir E comme un **sous-ensemble** d'un ensemble F déjà défini. La barre verticale se lit « tels que ». Elle peut être remplacé par une virgule, deux points, un point-virgule, etc. tant que cela n'introduit pas d'ambiguïté.

Exemple 3.1

- Un ensemble défini en extension : $E = \{\clubsuit\,;\,\diamondsuit\,;\,\spadesuit\,;\,\heartsuit\}$. Cet ensemble contient exactement 4 éléments, ceux qui apparaissent entre les accolades.
- Un ensemble défini en compréhension : $E = \{n \in \mathbb{N}\,;\, \exists k \in \mathbb{N}, n = 7k\}$. Cet ensemble est l'ensemble des multiples de 7, la barre verticale et la virgule se lisent « tel que ».

Remarque

Un ensemble peut être un élément d'un autre ensemble.

$$E = \{\mathbb{N}\,,\,\mathbb{Z}\,,\,\mathbb{Q}\,,\,\mathbb{R}\} \quad \text{est l'ensemble des ensembles de nombres vus en seconde}$$

On peut alors écrire $\mathbb{N} \in E$. **Attention :** $1 \notin E$! 1 est un élément de $\mathbb{N}$ qui est lui même un élément de E, mais 1 n'est pas un élément de E.

Proposition 3.1 (axiome)

Deux ensembles sont égaux si et seulement si ils ont les mêmes éléments. Si A et B sont deux ensembles,

$$A = B \iff (\forall x,\ x \in A \iff x \in B)$$

Remarque

Un ensemble n'est pas ordonné, autrement dit $\{a, b\}$ et $\{b, a\}$ sont les mêmes ensembles, on note $\{a, b\} = \{b, a\}$.

Proposition 3.2 (axiome)

Si E est un ensemble, alors $\{E\}$ est un ensemble distinct de E : c'est l'ensemble qui contient E comme seul élément. On peut alors écrire $E \in \{E\}$.

Remarque

Un ensemble à un seul élément s'appelle un **singleton**.

2. Inclusion

Définition 3.2

Soient E et F deux ensembles. On dit que E est **inclus dans** F si pour tout $x \in E$ on a $x \in F$. On note alors $E \subset F$.
On dit aussi que E est un **sous ensemble** de F, ou encore que E est **une partie** de F.

$$\begin{aligned} E \subset F &\iff (\forall x,\ x \in E \Longrightarrow x \in F) \\ &\iff (\forall x \in E,\ x \in F) \end{aligned}$$

→ **Exercice de cours n°1.**

Définition 3.3

Soient E et F deux ensembles. On note $F \setminus E$ l'ensemble des éléments qui appartiennent à F mais pas à E.

$$F \setminus E = \{x \in F\ ,\ x \notin E\}$$

Remarque

On peut noter $F \setminus E$ sans que E soit inclus dans F. Par exemple on peut écrire $Z \setminus]-\infty;0[= \mathbb{N}$ même si $]-\infty;0[$ contient des éléments qui ne sont pas dans $\mathbb{Z}$.

Propriété 3.3

Deux ensembles E et F sont égaux si et seulement si E est inclus dans F et F est inclus dans E :

$$E = F \iff (E \subset F \quad \text{et} \quad F \subset E)$$

Rédaction : prouver une égalité entre ensembles

« Soit $x \in E$, alors [...], donc $x \in F$. Ainsi $E \subset F$. Soit $x \in F$, alors [...], donc $x \in E$. Ainsi $F \subset E$
On en conclut par double inclusion que $E = F$ »

Proposition 3.4 (axiome)

Il existe un ensemble qui ne contient aucun élément. On l'appelle **ensemble vide** et on le note $\varnothing$.

L'ensemble vide est l'ensemble tel que $x \in \varnothing$ est faux quel que soit x.

Propriété 3.5

Quel que soit l'ensemble E, on a $\varnothing \subset E$ et $E \subset E$

Proposition 3.6 (axiome)

Pour tout ensemble E, il existe un ensemble noté $\mathcal{P}(E)$ dont les éléments sont les sous-ensembles de E.

Remarque

D'après la propriété précédente, quel que soit l'ensemble E, $\mathcal{P}(E)$ contient $\varnothing$ et E.

Remarque

On a $\varnothing \subset \varnothing$ donc $\mathcal{P}(\varnothing) = \{\varnothing\}$. On a donc $\mathcal{P}(\varnothing) \neq \varnothing$!

→ **Exercice de cours n°2.**

→ **Exercice de cours n°3.**

Définition 3.4

Si E et I sont deux ensembles, on appelle **famille d'éléments de** E **indexée par** I l'association d'un élément x_i de E à chaque élément i de I. On note $(x_i)_{i \in I}$ cette famille.
Une famille est dite finie si l'ensemble I des index est fini.

Remarque

La notion de famille généralise la notion de suite : une suite numérique n'est rien d'autre qu'une famille d'éléments de $\mathbb{R}$ indexée par $\mathbb{N}$. En pratique, on a souvent $I = \mathbb{N}$, $I = \mathbb{Z}$ ou bien I est fini de la forme $I = \{1, 2, \dots, n\}$

II. Opérations sur les ensembles

1. Complémentaire, union, intersection

Définition 3.5

Soit E un ensemble et $A \subset E$. On appelle **complémentaire de** A **dans** E et on note $\complement_E A$ l'ensemble de tous les éléments de E qui n'appartiennent pas à A.
Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguité sur l'ensemble E contenant A, on note $\complement_E A = \overline{A}$.

$$\complement_E A = \{x \in E\ ,\ x \notin A\}$$

Exemples 3.2

1. $\complement_{\mathbb{Z}} \mathbb{N}$ est l'ensemble des entiers strictement négatifs
2. $\complement_{\mathbb{R}} \mathbb{N}$ est l'ensemble des nombres réels non entiers

Remarque

- $\complement_E A = E \setminus A$ mais la notation $\complement$ ne s'utilise que pour un sous-ensemble de E. Par exemple si $A = \{1, 2, 3, 4\}$ et $B = \{3, 4, 5, 6\}$ on peut écrire $A \setminus B = \{1, 2\}$ mais pas $\complement_A B$.
- Si $\overline{A}$ est le complémentaire de A dans E, alors $\overline{\overline{A}} = A$.

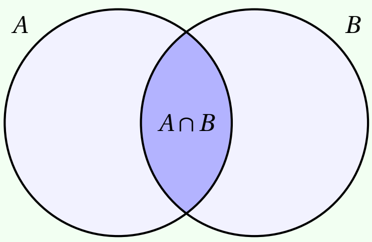
Propriété 3.7

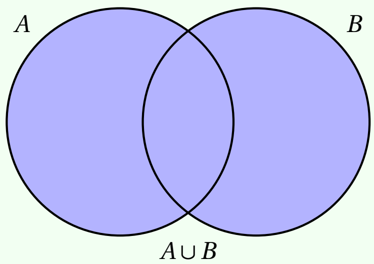
Soit E un ensemble et $A \subset E$ et $B \subset E$ deux parties de E.
Si $A \subset B$, alors $\overline{B} \subset \overline{A}$

Définition 3.6

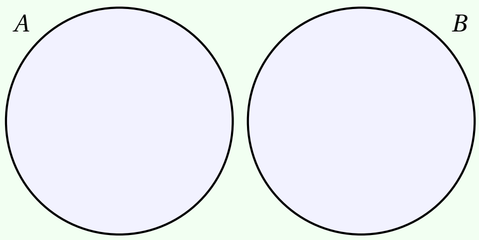
Soient A et B deux ensembles.

- L'ensemble $A \cap B$ (A intersection B) est l'ensemble des éléments qui appartiennent à la fois à A et à B
- L'ensemble $A \cup B$ (A union B) est l'ensemble des éléments qui appartiennent à A, à B ou aux deux.





Si $A \cap B = \varnothing$, on dit que A et B sont **disjoints**.



Remarque

$A \cap B = \{x \mid (x \in A) \wedge (x \in B)\}$ et $A \cup B = \{x \mid (x \in A) \vee (x \in B)\}$

Propriété 3.8 (loi de De Morgan)

Soit E un ensemble et soient A et B deux parties de E. Alors

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

De même,

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

Propriété 3.9 (Distributivité)

Soient A, B et C trois ensembles. Alors

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

et

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

→ **Exercice de cours n° 4.**

2. Union et intersection quelconque

Définition 3.7

Si $(E_1, E_2, ..., E_n)$ est une famille finie d'ensembles, alors on note

$$\bigcup_{k=1}^{n} E_i = E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_n \quad \text{et} \quad \bigcap_{k=1}^{n} E_i = E_1 \cap E_2 \cap \cdots \cap E_n$$

Plus généralement, si $(E_i)_{i\in I}$ est une famille quelconque d'ensembles, alors on note

$$\bigcup_{i\in I} E_i = \{x \mid \exists i \in I, x \in E_i\} \quad \text{et} \quad \bigcap_{i\in I} E_i = \{x \mid \forall i \in I, x \in E_i\}$$

Exemple 3.3

L'ensemble des solutions réelles de l'inéquation $\cos(x) \geq \dfrac{1}{2}$ est $S = \displaystyle\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left[-\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi ; \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi\right]$

Autrement dit x est solution de $\cos(x) \geq \dfrac{1}{2}$ si et seulement si $\exists k \in \mathbb{Z},\ -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{3} + 2k\pi$

→ **Exercice de cours n° 5.**

Proposition 3.10

Les règles de distributivité s'appliquent encore pour des unions et intersections quelconque :

$$A \cap \left(\bigcup_{i\in I} E_i\right) = \bigcup_{i\in I} (A \cap E_i)$$

et

$$A \cup \left(\bigcap_{i\in I} E_i\right) = \bigcap_{i\in I} (A \cup E_i)$$

3. Produit cartésien

Définition 3.8

Un **couple** est la donnée de deux objets mathématiques dans un ordre précis. Si a et b sont deux objets, on note (a, b) le couple formé par a et b.

Propriété 3.11 (admise)

Deux couples (a, b) et (x, y) sont égaux si et seulement si leurs composantes sont égales deux à deux :

$$(a,b) = (x,y) \iff (a = x \quad \text{et} \quad b = y)$$

On a donc en général $(a,b) \neq (b,a)$, sauf lorsque $a = b$.

Définition 3.9

Soient A et B deux ensembles. Le **produit cartésien** $A \times B$ est l'ensemble des couples (a,b) où $a \in A$ et $b \in B$.

Exemple 3.4

Soit $A = \{1,2\}$ et $B = \{a,b,c\}$. L'ensemble $A \times B$ s'écrit en extension :

$$A \times B = \big\{(1,a),(1,b),(1,c),(2,a),(2,b),(2,c)\big\}$$

→ **Exercice de cours n°6.**

Remarque

Si E et F sont des ensembles, écrire « $\forall x \in E, \forall y \in F$ » revient à écrire « $\forall (x,y) \in E \times F$ »

La notion de n-uplet généralise la notion de couple :

Définition 3.10

Un n-uplet est la donnée de n objets dans un ordre précis. Si $x_1, \ldots, x_n$ sont ces n objets, on note $(x_1, \ldots, x_n)$ le n-uplet qu'ils forment.

Définition 3.11

Si $(E_1, E_2, ..., E_n)$ est une famille finie d'ensembles, le produit cartésien de E_1,...,E_n est l'ensemble des n-uplets formés d'un élément pris dans chacun des ensembles de cette famille. Autrement dit :

$$E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n = \big\{(e_1, e_2, ..., e_n) \mid \forall i \in [\![1,n]\!], e_i \in E_i\big\}$$

Propriété 3.12 (admise)

Deux n-uplets sont égaux si et seulement si leurs composantes sont égales deux à deux :

$$(a_1, \ldots, a_n) = (b_1, \ldots, b_n) \iff \forall k \in \{1, \ldots, n\},\ a_k = b_k$$

Définition 3.12

Soit E un ensemble et n un entier. On note $E^n = \underbrace{E \times E \times \cdots \times E}_{n \text{ fois}}$ l'ensemble des n-uplet d'éléments de E.

Un 2-uplet est un **couple**, un 3-uplet est un **triplet**, un 4-uplet est un **quadruplet**, etc.

Remarque

Un n-uplet d'éléments de E est une **liste ordonnée de n éléments de** E (avec éventuellement des répétitions).

Exemple 3.5

(b,a,b,a,r) est un 5-uplet de l'ensemble $\{a,b,r\}$.

Exemple 3.6

Le plan muni d'un repère peut être assimilé à l'ensemble $\mathbb{R}^2$ des couples (x,y) de coordonnées réelles.
L'espace muni d'un repère peut être assimilé à l'ensemble $\mathbb{R}^3$ des triplets (x,y,z) de coordonnées réelles.

III. Applications

1. Généralités

a. Application, image directe, image réciproque

Définition 3.13

Soient E et F deux ensembles. Définir une **application** f de E vers F, notée $f : E \to F$, c'est associer à chaque élément x de E un unique élément $f(x)$ de F. $f(x)$ s'appelle **l'image** de x par f, et si $y = f(x)$ on dit que x est **un antécédent** de y par f. L'application f ainsi définie peut se noter :

$$f : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

On note $\mathcal{F}(E,F)$ l'ensemble des applications de E vers F. Pour ces applications, E s'appelle **l'ensemble de départ** et F **l'ensemble d'arrivée**.

Propriété 3.13 (admise)

Deux applications $f_1 : E_1 \to F_1$ et $f_2 : E_2 \to F_2$ sont égales si et seulement si

$$\begin{cases} E_1 = E_2 \\ F_1 = F_2 \\ \forall x \in E_1, f_1(x) = f_2(x) \end{cases}$$

Remarque

L'ensemble de départ et l'ensemble d'arrivée font donc partie intégrante de la définition d'une application.

Ainsi, les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2$ et $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2$ sont distinctes : $f \neq g$.

De même, les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \mathrm{e}^x$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*,\ x \mapsto \mathrm{e}^x$ sont distinctes.

Remarque

Le terme **fonction** est parfois utilisé à la place du mot **application**. Il est utilisé dans un sens plus global, parfois sans préciser l'ensemble de départ et l'ensemble d'arrivée. Par exemple : « la fonction f définie par $f(x) = \ln\left(x^2 - \frac{1}{x}\right)$ »

Rédaction : définir une fonction

Pour définir une fonction f, on n'écrit pas « Soit la fonction $f(x) = [...]$ » mais « Soit la fonction $f : x \mapsto [...]$ » (qui se lit « Soit la fonction f qui à x associe [...] »).

f est le nom de la fonction, utilisé pour décrire des propriétés **globales** de la fonction :

- f est croissante sur I
- f est continue sur I
- etc.

$f(x)$ désigne l'élément image de x par f,

Exemples 3.7

- Une fonction réelle de la variable réelle est une application d'une partie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Par exemple :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{x} \end{array}$$

- Une suite numérique u est une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$

$$u : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ n & \longmapsto & u_n \end{array}$$

- Si E est un ensemble, alors on peut définir l'application qui à une partie de E associe son complémentaire dans E :

$$f : \begin{array}{ll} \mathcal{P}(E) & \longrightarrow \mathcal{P}(E) \\ A & \longmapsto \complement_E A \end{array}$$

Définition 3.14

Soit $f : E \to F$ une application. Si A est une partie de E, on appelle **image (directe) de** A **par** f et on note $f(A)$ l'ensemble

$$f(A) = \{f(x) \mid x \in A\} = \{y \in F \mid \exists x \in E, y = f(x)\}$$

Exemple 3.8

On considère $E = \mathbb{R}$, $F = \mathbb{R}$, et $f : E \longrightarrow F,\ x \longmapsto x^2$.
Alors,

- $f(E) = \mathbb{R}_+$ (grâce au TVI)
- $f(\{-2, 0, 2, 3\}) = \{0, 4, 9\}$
- $f(\mathbb{Z}) = \{0, 1, 2, 4, 9, 16, 25, \dots\}$
- $f([-2, 5]) = [0, 25]$ (grâce au TVI)

Proposition 3.14

Soient E, F deux ensembles, $f : E \longrightarrow F$ une application, et A, B deux parties de E telles que $A \subset B$, alors $f(A) \subset f(B)$.

Définition 3.15

Si A est une partie de F, on appelle **image réciproque de** A **par** f et on note $f^{-1}(A)$ l'ensemble

$$f^{-1}(A) = \left\{x \in E \mid f(x) \in A\right\}$$

Exemple 3.9

On considère $E = \mathbb{N}$, $F = \mathbb{N}$ et $f : E \longrightarrow F, x \longmapsto 2x$.
Alors

- $f^{-1}(\{0, 1, 2, 3, 4\}) = \{0, 1, 2\}$
- $f^{-1}(\{1, 3, 5\}) = \varnothing$

→ **Exercice de cours n°7.**

Remarque

Si $f : E \longrightarrow F$ est une application on a toujours $f^{-1}(F) = E$ par définition.

Proposition 3.15

Soit $f : E \longrightarrow F$ une application et soient A, B deux parties de F telles que $A \subset B$. Alors $f^{-1}(A) \subset f^{-1}(B)$.

→ **Exercice de cours n°8.**

Proposition 3.16

Soit $f : E \to F$ une application et soient $A \subset E$ et $B \subset E$ deux ensembles. Alors :

- $f(\varnothing) = \varnothing$
- $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$
- $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$

→ **Exercice de cours n°9.**

→ **Exercice de cours n°10.**

b. Composition de fonctions

Définition 3.16

Soient E, F et G trois ensembles. On considère une application $f : E \to F$ et une application $g : F \to G$.
L'**application composée** de f par g, notée $g \circ f$, est l'application de E vers G qui à un élément x associe $g(f(x))$.

Exemple 3.10

On considère $E = \mathbb{R}_+$, $F = \mathbb{R}_+$ et $G = \mathbb{R}_+$. Soit $f : E \longrightarrow F, x \longmapsto x^2$ et $g : F \longrightarrow G, x \longmapsto x+1$.
Alors $g \circ f : E \to F,\ x \longmapsto x^2+1$.
On peut aussi définir l'application $f \circ g$, qui est en général différente de $g \circ f$. Ici $f \circ g : x \longmapsto (x+1)^2$.

Remarque

Non seulement $f \circ g \neq g \circ f$ en général, mais en plus il se peut que $f \circ g$ soit bien définie et que $g \circ f$ ne le soit pas.
Par exemple $E = \mathbb{R}_+$, $G = \mathbb{R}_+$ et $F = \mathbb{R}^-$.
On considère $f : E \longrightarrow F, x \mapsto \sqrt{x}$ et $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^-, x \longmapsto -x$.
Alors $g \circ f : E \to G, x \longmapsto -\sqrt{x}$, mais $g(x) = -x$ étant négatif, on ne peut pas composer par la fonction f définie seulement sur $\mathbb{R}_+$.
$f \circ g$ n'est pas définie.

c. Restriction et prolongement

Définition 3.17

Soient E et F deux ensembles et soit $A \subset E$ un sous-ensemble de E.

- Soit $f : E \to F$ une application. On appelle **restriction de** f **à** A l'application $f\big|_A$ définie par
$$f\big|_A : \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$
- Soit $f : A \to F$ une application. Un **prolongement** de f à E est une application $\widetilde{f}$ définie sur E dont la restriction à A est f, c'est à dire :
$$\widetilde{f} : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & \widetilde{f}(x) \end{array}$$
telle que : $\forall x \in A,\ \widetilde{f}(x) = f(x)$.

Exemple 3.11

L'application f définie par $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \longmapsto x^2$ n'est pas monotone, mais sa restriction à $I = [0; +\infty[$, définie par $f\big|_{[0;+\infty[} : [0; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto x^2$, est strictement croissante.

Exemple 3.12

Soient f et $\widetilde{f}$ définies par

$$\left\{ \begin{array}{cccc} f : & \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \dfrac{1}{x} \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{cccc} \widetilde{f} : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Alors $\widetilde{f}$ est un prolongement de f à $\mathbb{R}$. Ce n'est pas le seul prolongement possible, on a choisi $\widetilde{f}(0) = 1$ mais on aurait pu choisir n'importe quelle valeur réelle comme image de 0.

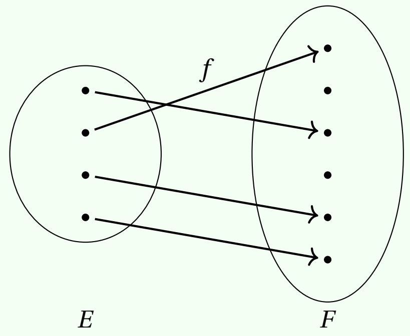
2. Injection, surjection, bijection

Définition 3.18

Soient E, F deux ensembles et $f : E \longrightarrow F$ une application. On dit que f est **injective**, ou que f est une **injection**, si :

$$\boxed{\forall (x, y) \in E^2,\ f(x) = f(y) \Longrightarrow x = y}$$

Autrement dit, f est injective si tout élément de F admet **au plus un antécédent**.



Remarque

Par contraposée, $f : E \to F$ est injective si et seulement si $\forall (x, y) \in E^2$, $x \neq y \Longrightarrow f(x) \neq f(y)$. f est donc injective si deux éléments distincts de E ont toujours des images distinctes par f. On retient cependant le sens de la définition qui est plus facile à démontrer en pratique.

→ **Exercice de cours n° 11.**

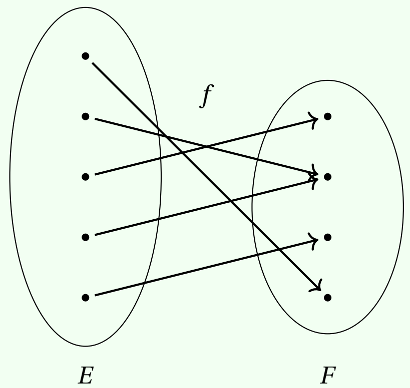
→ **Exercice de cours n° 12.**

Définition 3.19

Soient E, F deux ensembles et $f : E \longrightarrow F$ une application. On dit que f est **surjective**, ou que f est une **surjection**, si :

$$\boxed{\forall y \in F, \exists x \in E,\ f(x) = y}$$

Autrement dit, f est surjective si tout élément de F admet **au moins un antécédent**.



→ **Exercice de cours n° 13.**

Exemple 3.13

On considère $E = \mathbb{R}, F = \mathbb{R}$ et $f : E \longrightarrow F, x \longmapsto x^2$.
Si $y < 0$, y n'a pas d'antécédent par f, donc f n'est pas surjective.

Remarque

La notion de surjectivité dépend fortement de l'ensemble d'arrivée que l'on se donne. Par exemple l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*,\ x \longmapsto \exp(x)$ est bijective mais $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \longmapsto \exp(x)$ ne l'est pas.

Remarque

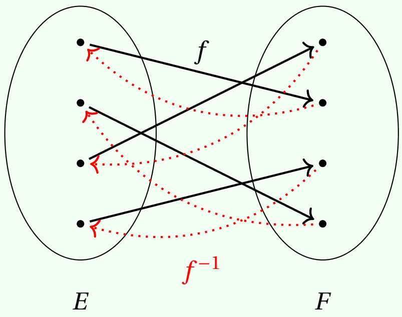
$f : E \to F$ est surjective si et seulement si $f(E) = F$.

Définition 3.20

Soient E et F deux ensembles et $f : E \to F$ une application. On dit que f est **bijective** , ou que f est une **bijection**, si f est **à la fois injective et surjective**.
Autrement dit, f est bijective si tout élément de F admet **exactement un antécédent** c'est à dire si :

$$\boxed{\forall y \in F, \exists ! x \in E, f(x) = y}$$

On note alors f^{-1} l'application de F vers E qui à un élément y associe son unique antécédent par f. Cette application s'appelle **l'application réciproque de** f et elle est également bijective.



Exemple 3.14

- $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto -3x$ est bijective et sa bijection réciproque est $f^{-1} : x \longmapsto -\frac{1}{3}x$.
- $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto x^3$ est bijective et sa bijection réciproque est $f^{-1} : x \longmapsto \sqrt[3]{x}$.
- $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+^*, x \longmapsto \exp(x)$ est bijective, et $\forall y \in \mathbb{R}_+^*, f^{-1}(y) = \ln(y)$.

Remarque

La notation f^{-1} prête à confusion à cause de la notation pour l'image réciproque d'un ensemble. Pour rappel, si $A \subset F$ est un sous-ensemble de F, $f^{-1}(A) = \{x \in E,\ f(x) \in A\}$ est un ensemble et il est **toujours bien défini**. En revanche, si $y \in F$ est un élément de F, $f^{-1}(y)$ n'est défini **que si** f **est une bijection**. L'ensemble $f^{-1}(\{y\})$, lui, est toujours bien défini (mais éventuellement vide si y n'a pas d'antécédent par f) !

Définition 3.21

On dit que deux ensembles E et F sont en bijection s'il existe une application bijective $f : E \to F$.

Remarque

On verra plus tard que deux ensembles finis sont en bijection si et seulement si ils ont le même cardinal.

Propriété 3.17

Soit $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications.

- Si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective,
- Si $g \circ f$ est injective, alors f est injective.

Définition 3.22

Soit E un ensemble. On définit l'application $\mathrm{id}_E : E \to E$ par $\forall x \in E, \mathrm{id}_E(x) = x$.
L'application id_E est une bijection et son application réciproque est elle-même.

Remarque

Si $f : E \to F$ est une application quelconque, $\mathrm{id}_F \circ f = f$ et $f \circ \mathrm{id}_E = f$.

Propriété 3.18

Si $f : E \to F$ est bijective, alors $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_F$ et $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_E$.

La réciproque de cette propriété est vraie, plus précisément on a la propriété suivante :

Propriété 3.19

Soit $f : E \to F$ une application. f est bijective si et seulement s'il existe une application $g : F \to E$ telle que $f \circ g = \mathrm{id}_F$ et $g \circ f = \mathrm{id}_E$, et on a alors $g = f^{-1}$.

Remarque

Attention : une seule de ces conditions ne suffit pas. On peut avoir $g \circ f = \mathrm{id}_E$ (ou $f \circ g = \mathrm{id}_F$) sans que f et g ne soient bijective.

Par exemple si $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}, x \mapsto x$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+, x \mapsto |x|$, alors $g \circ f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+ = \mathrm{id}_{\mathbb{R}_+}$ mais f n'est pas surjective et g n'est pas injective.

Propriété 3.20

Soit $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications bijectives. Alors $g \circ f$ est une bijection de E vers G et de plus :

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$$

IV. Dénombrement

1. Ensembles finis

Définition 3.23

Si $a, b \in \mathbb{Z}$ avec $a < b$ on note $[\![a, b]\!] = \{a, a+1, \dots, b\}$ l'ensemble des entiers relatifs compris entre a et b.

Proposition 3.21 (admise)

Pour tous entiers $n, m \in \mathbb{N}^*$

- Il existe une bijection de $[\![1, n]\!]$ vers $[\![1, m]\!]$ si et seulement si $n = m$.
- Il existe une injection de $[\![1, n]\!]$ dans $[\![1, m]\!]$ si et seulement si $n \leq m$.
- Il existe une surjection de $[\![1, n]\!]$ sur $[\![1, m]\!]$ si et seulement si $n \geq m$.

Définition 3.24

Un ensemble E est dit fini s'il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que E est en bijection avec $[\![1, n]\!]$. L'entier n est alors unique et s'appelle **cardinal de** E, on note $\mathrm{card}(E) = n$. Un ensemble **infini** est un ensemble qui n'est pas fini.

Exemple 3.15

- L'ensemble des élèves d'hypokhâgne BL de SMN est fini de cardinal 43
- L'ensemble des mots de passe à 20 caractères alphanumériques est fini de cardinal 62^{20}
- Si $a, b \in \mathbb{Z}$ avec $a < b$ alors $\mathrm{card}([\![a, b]\!]) = b - a + 1$
- L'ensemble des entiers naturels est infini.

Propriété 3.22

Soient E et F deux ensembles finis. Alors

- $\mathrm{card}(E) = \mathrm{card}(F)$ si et seulement si il existe une bijection $f : E \longrightarrow F$.
- $\mathrm{card}(E) \leq \mathrm{card}(F)$ si et seulement si il existe une injection $f : E \longrightarrow F$.
- $\mathrm{card}(E) \geq \mathrm{card}(F)$ si et seulement si il existe une surjection $f : E \longrightarrow F$.

Le principe des tiroirs est un énoncé intuitif qui découle de la propriété précédente :

Propriété 3.23 (Principe des tiroirs)

Si on dispose de m chaussettes à ranger dans n tiroirs et que $m > n$, alors au moins un tiroir doit contenir plus d'une chaussette.

Mathématiquement, le principe des tiroirs s'énonce comme suit : si $\mathrm{card}(E) > \mathrm{card}(F)$ alors il n'existe pas d'application injective de E dans F.

→ **Exercice de cours n° 14.**

Propriété 3.24

Si B est un ensemble fini et $A \subset B$ est une partie de B, alors A est fini et $\mathrm{card}(A) \leq \mathrm{card}(B)$.

Propriété 3.25 (admise)

Si B est une ensemble fini et $A \subset B$ une partie de B, alors $A = B$ si et seulement si A et B ont même cardinal.

2. Formule du crible

Propriété 3.26 (admise)

Si A et B sont disjoints, alors $\operatorname{card}(A \cup B) = \operatorname{card}(A) + \operatorname{card}(B)$.

Propriété 3.27

Soient A et B deux ensembles contenus dans un ensemble E. On note $\overline{A}$ le complémentaire de A dans E. Alors $(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) = A$ et cette union est disjointe, c'est à dire que $(A \cap B) \cap (A \cap \overline{B}) = \varnothing$.

Proposition 3.28 (formule du crible)

Soient A et B deux ensembles finis. Alors

$$\operatorname{card}(A \cup B) = \operatorname{card}(A) + \operatorname{card}(B) - \operatorname{card}(A \cap B)$$

Pour n ensembles, il existe une formule du crible généralisé. Elle est hors-programme mais il faut savoir l'utiliser si elle est donnée.

Proposition 3.29 (hors programme)

Soient $(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ une famille finie d'ensembles. Alors

$$\operatorname{card}(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n} \operatorname{card}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cup A_{i_k})$$

→ **Exercice de cours n° 15.**

3. Partition

Définition 3.25

Soit E un ensemble. Une **partition** de E est une famille de parties non vides de E deux à deux disjointes et dont l'union est E, c'est à dire une famille $(E_i)_{i \in I}$ telle que

$$\bigcup_{i \in I} E_i = E \quad \text{et} \quad \forall (i,j) \in I^2,\ i \neq j \Rightarrow E_i \cap E_j = \varnothing$$

Exemple 3.16

Des partitions possibles de $\{a,b,c,d\}$ sont

- $\big(\{a\},\{b,c,d\}\big)$
- $\big(\{a,c\},\{b\},\{d\}\big)$,
- $\big(\{a\},\{b\},\{c\},\{d\}\big)$,
- etc.

Proposition 3.30

Si E est un ensemble fini et $(E_1, E_2, \ldots, E_n)$ est une partition de E, alors $\operatorname{card}(E) = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{card}(E_i)$.

Proposition 3.31

Soit E un ensemble de cardinal n. L'ensemble $\mathcal{P}(E)$ des parties de E a pour cardinal 2^n.

→ **Exercice de cours n° 16.**

4. Principe multiplicatif

Propriété 3.32

Soient A et B deux ensembles finis. Alors $A\times B$ est un ensemble fini et

$$\mathrm{card}(A\times B)=\mathrm{card}(A)\times\mathrm{card}(B)$$

→ **Exercice de cours n° 17.**

Propriété 3.33

Si E est un ensemble fini de cardinal p et n un entier naturel, alors $\mathrm{card}(E^n)=p^n$. Le nombre de n-uplets d'éléments E est p^n.

Exemple 3.17

Un digicode d'immeuble comporte 5 symboles parmi 10 chiffres et 2 lettres qui peuvent éventuellement se répéter. Un code pour cet immeuble est un 5-uplet d'un ensemble à 12 éléments, il y a donc $12^5\simeq 250000$ codes possibles

Exemple 3.18

Si $E=\{x_1,x_2,\dots,x_n\}$ est un ensemble de cardinal n, considérons l'application

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathcal{P}(E) & \longrightarrow & \{0,1\}^n \\ & A & \longmapsto & (e_i)_{1\leq i\leq n} \end{array}$$

où pour tout i, $e_i=\begin{cases}1 & \text{si } x_i\in A\\ 0 & \text{si } x_i\notin A\end{cases}$. Cette application est bijective, autrement dit chaque n-uplet de $\{0,1\}^n$ caractérise de façon unique une partie de E.

Injectivité : Supposons que $f(A)=f(B)$, notons $(e_1,\dots,e_n)=f(A)$ et $(f_1,\dots,f_n)=f(B)$, alors pour tout $i\in[\![1,n]\!]$, $e_i=f_i$, donc $x_i\in A\Longleftrightarrow x_i\in B$, donc $A=B$.

Surjectivité : Soit $(e_1,\dots,e_n)\in\{0,1\}^n$. Soit $A=\{x_i\in E\mid e_i=1\}$, alors $f(A)=(e_1,\dots,e_n)$ par définition de f, donc f est surjective.

On en déduit que $\mathrm{card}(\mathcal{P}(E))=\mathrm{card}(\{0,1\}^n)=(\mathrm{card}(\{0,1\})^n=2^n$.

→ **Exercice de cours n° 18.**

5. Arrangements

Définition 3.26

Soit E un ensemble fini de cardinal n et k un entier avec $1\leq k\leq n$. Un k-**arrangement** de E est un k-uplet d'éléments de E **sans répétition**.

Remarque

D'autres définitiions possibles d'un k-arrangement :

- Un k-arrangement est une liste ordonnée de k éléments distincts de E.
- Un k-arrangement de E est une partie de E **ordonnée** à k éléments.
- Un k-arrangement est une application injective de $\{1,2,\dots,k\}$ dans E.

Exemple 3.19

$E=\{1,2,3,4,5\}$
Le couple $(5,2)$ est un 2-arrangement de E. Le couple $(2,5)$ est un autre 2-arrangement de E.

Définition 3.27

Soit E un ensemble fini de cardinal n. Une permutation de E est un n-arrangement de E, autrement dit c'est une liste ordonnée de tous les éléments de E.

Remarque

On définit $n!$ par $0! = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $n! = n \times (n-1)!$.
On a donc $n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 2 \times 1 = \prod_{k=1}^{n} k$

Proposition 3.34

Soit E un ensemble de cardinal n et $0 \leq k \leq n$ un entier.

- Le nombre de k-arrangements de E, noté A_n^k, est donné par la formule

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times (n-k+1)$$

- Le nombre de permutation de E est $n!$

6. Combinaisons

Définition 3.28

Soit E un ensemble fini de cardinal n et $0 \leq k \leq n$ un entier. Une k-combinaison de E est une partie à k éléments de E.

Remarque

Une combinaison est **non ordonnée**.

Exemple 3.20

On reprend $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.
L'ensemble $\{5, 2\}$ est une 2-combinaison de E.
L'ensemble $\{2, 5\}$ est cette fois ci la même 2-combinaison de E puisque $\{2, 5\} = \{5, 2\}$.

Proposition 3.35

Le nombre de k-combinaisons de E, noté C_n^k ou $\binom{n}{k}$ (se lit « k parmi n »), est donné par la formule

$$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

→ **Exercice de cours n° 19.**

Proposition 3.36

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

Exercices de cours

Exercice 1

Soient $E = \{n \in \mathbb{N} \mid \exists k \in \mathbb{N}, n = 6k\}$ et $F = \{n \in \mathbb{R} \mid \exists k \in \mathbb{N}, n = 3k\}$. Montrer que $E \subset F$.

Exercice 2

Déterminer $\mathcal{P}(E)$ dans les cas suivants :

1. $E = \{0, 1\}$
2. $E = \{a, b, c\}$
3. $E = \mathcal{P}(\{1\})$

Exercice 3

Déterminer $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\varnothing)))$

Exercice 4

Soit E un ensemble et A, B, C trois parties de E.
Montrer les équivalences suivantes :

1. $A \cap B = B \Leftrightarrow B \subset A$
2. $A \cup B = B \Leftrightarrow A \subset B$
3. $A \cap B = A \cap C$ et $A \cup B = A \cup C \ \Leftrightarrow B = C$
4. $\overline{A} \subset B \Leftrightarrow \overline{B} \subset A$

Exercice 5

Déterminer les ensembles $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [n, n+1[$ et $B = \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} [0, \frac{1}{n}[$.

Exercice 6

Soit $E = \{1, 2, 3\}$ et $F = \{c, d\}$. Écrire la liste de tous les éléments de $E \times F \times F$.

Exercice 7

On considère $E = \mathbb{R}$, $F = \mathbb{R}$ et $f : E \longmapsto F$, $x \longmapsto e^x$
Compléter sans justifier

a) $f(\mathbb{R}) = \ldots\ldots$

b) $f(\mathbb{R}_+) = \ldots\ldots$

c) $f(R_-) = \ldots\ldots$

d) $f([-1;1]) = \ldots\ldots$

e) $f^{-1}(\mathbb{R}) = \ldots\ldots$

f) $f^{-1}(]0;1]) = \ldots\ldots$

g) $f^{-1}(\mathbb{R}_-) = \ldots\ldots$

h) $f^{-1}(\{-1\}) = \ldots\ldots$

i) $f^{-1}([-1;1]) = \ldots\ldots$

Exercice 8

On considère $E = \{1, 2\}^2$ et $f : E \to \mathbb{R}$ définie pour tout $(x, y) \in \{1, 2\}^2$ par $f(x, y) = 3x - 2y$. Déterminer $f(E)$ puis $f^{-1}(\mathbb{R}_+)$

Exercice 9

Trouver un exemple d'application $f : E \to F$ et de sous ensembles A et B de E tels que $f(A \cap B) \neq f(A) \cap f(B)$.

Exercice 10

Soient E et F deux ensembles et soit $f : E \to F$ une application.
Soit $A \in \mathcal{P}(E)$ et $B \in \mathcal{P}(F)$

1. Montrer que $A \subset f^{-1}(f(A))$

2. Montrer que $f(f^{-1}(B)) \subset B$
3. Donner un exemple d'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $A \subset \mathbb{R}$ telle que $A \neq f^{-1}(f(A))$

Exercice 11

Soit $E = \mathbb{R}, F = \mathbb{R}$ et $f : E \longrightarrow F, x \longmapsto 3x - 1$. Montrer que f est injective.

Exercice 12

Soit $E = \mathbb{R}$, $F = \mathbb{R}$ et $f : E \longrightarrow F, x \longmapsto x^2$. Montrer que f n'est pas injective.

Exercice 13

Soit $E = \mathbb{R}$, $F = [3; +\infty[$ et $f : x \longmapsto x^2 + 3$. Montrer que f est surjective.

Exercice 14

n personnes se rencontrent à une fête et échangent des poignées de mains. Montrer qu'au moins 2 personnes ont échangé le même nombre de poignées de mains.

Exercice 15

Appliquer la formule du crible généralisé à $A \cup B \cup C$ et à $A \cup B \cup C \cup D$

Exercice 16

Soit E un ensemble et a un élément de E fixé. On note $P_1 = \{A \in \mathcal{P}(E) \mid a \in A\}$ et $P_2 = \{A \in \mathcal{P}(E) \mid a \notin A\}$. Montrer que l'application $f : P_2 \to P_1, F \longmapsto F \cup \{a\}$ est une bijection.

Exercice 17

Soit A et B deux ensembles finis de cardinal n et m, et soient $f : A \to [\![1, n]\!]$ et $g : B \to [\![1, m]\!]$ deux bijections. Déterminer une bijection de $A \times B$ vers $[\![1, nm]\!]$ en fonction de f et g.

Exercice 18

Soient E et F deux ensembles finis de cardinal respectif n et p. On note $\mathcal{F}(E, F)$ l'ensemble des applications de E vers F. Montrer que $\text{card}(\mathcal{F}(E, F)) = p^n$

Exercice 19

Calculer

1. Le nombre de mot de passe de 10 caractères incluant des lettres majuscules ou minuscules et des chiffres.
2. Le nombre de résultat de tiercé possibles pour une course à 12 chevaux (un résultat = les trois premiers chevaux dans l'ordre).
3. Le nombre de façon de classer 6 candidats à un entretien d'embauche
4. Le nombre de façon de choisir 4 élèves délégués dans une classe de 40 élèves.
5. Le nombre de façon de choisir 4 élèves délégués en respectant la parité dans une classe de 15 garçons et 25 filles.
6. Le nombre de nombres palindromes à 128 chiffres (un nombre palindrome = un nombre qui se lit dans les deux sens comme 51315 ou 2002)
7. Le nombre de mains au poker contenant un carré (une main = 5 cartes parmi 52, un carré = 4 cartes de la même valeur)